

BAB 5

RANGKAIAN DALAM TEORI GRAF

5.1 Rangkaian

- Graf digunakan untuk mewakili data yang terdiri daripada objek diskret dan menggambarkan kaitan antara objek tersebut secara grafik yang mudah difahami.
- Graf** ditafsirkan sebagai suatu siri **bintik** sama ada berkait atau tidak antara satu sama lain melalui **garis**.
- Bintik dikenali sebagai **bucu** dan garis yang mengaitkan dua bucu ialah **tepi**.
- Rangkaian merupakan sebahagian daripada graf dengan keadaan bucu dan tepi mempunyai sifat tersendiri.
- Struktur data rangkaian mempunyai hubungan banyak kepada banyak.
- Contoh graf yang melibatkan rangkaian adalah seperti yang berikut:
 - Rangkaian pengangkutan darat
 - Bucu – kawasan, pekan, bandar atau bangunan
 - Tepi – jalan raya, lebuhraya atau landasan kereta api
 - Rangkaian sosial
 - Bucu – individu, kumpulan atau organisasi
 - Tepi – jenis hubungan seperti kawan, keluarga atau rakan sekerja
- Tatatanda graf merupakan set pasangan tertib iaitu $G = (V, E)$ dengan keadaan;
 - V ialah set bintik atau bucu
 - E ialah set tepi atau garis yang menghubungkan sepasang bucu
- Darjah, d** ialah bilangan tepi yang mengaitkan dua bucu. Bilangan darjah suatu graf ialah dua kali bilangan tepi, iaitu:

$$\Sigma d(v) = 2E; v \in V$$

G = Graf (*graph*)

v = Bucu (*vertices*) atau bintik.

e = Tepi (*edge*) atau garis atau lengkung.

d = Darjah (*degree*)

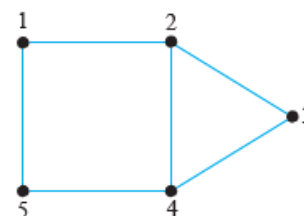
Σ = Jumlah

- Graf mudah ialah graf yang tidak mengandungi gelung atau berbilang tepi.

10. Contoh 1

Berdasarkan graf mudah di sebelah, tentukan

- V dan $n(V)$
- E dan $n(E)$
- bilangan darjah



Penyelesaian:

- $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
 $n(V) = 5$
- $E = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,5), (5,1) \}$
 $n(E) = 6$
- Bilangan darjah
 $\Sigma d(v) = 2E$
 $= 2(6) = 12$

11. Contoh 2

Nyatakan bilangan bucu, tepi dan darjah bagi graf di sebelah.

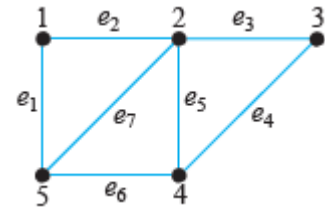
Bucu = 5

Tepi = 7

Darjah = 2 X tepi

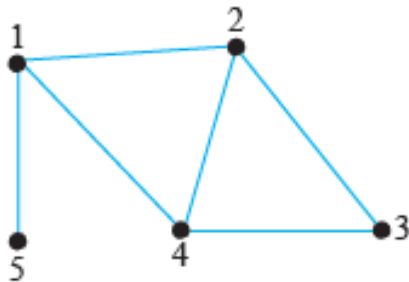
= 2 X 7

= 14



Latihan 1

Berdasarkan graf mudah di bawah,



tentukan

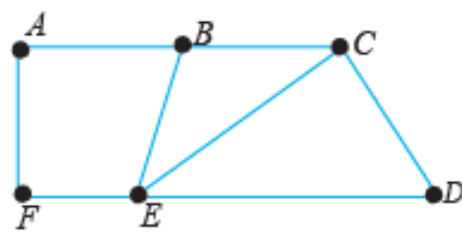
a) V dan $n(V)$

b) E dan $n(E)$

c) bilangan darjah

Latihan 2

Berdasarkan graf mudah di bawah,



tentukan

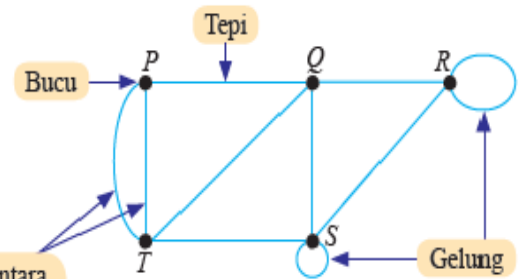
a) V dan $n(V)$

b) E dan $n(E)$

c) bilangan darjah

12. **Berbilang Tepi** bermaksud:

- melibatkan dua bucu.
- kaitan antara dua bucu tersebut dinyatakan melalui lebih daripada satu tepi.
- bilangan darjah ialah dua kali bilangan tepi.



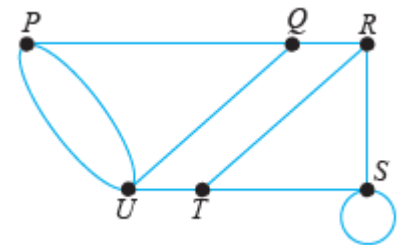
13. **Gelung** bermaksud:

- melibatkan satu bucu.
- tepi berbentuk lengkung atau bulatan yang terbaek kepada bucu asal.
- Bilangan darjah setiap gelung ialah dua.

14. Contoh 3

Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi. Nyatakan

- V dan $n(V)$
- E dan $n(E)$
- bilangan darjah



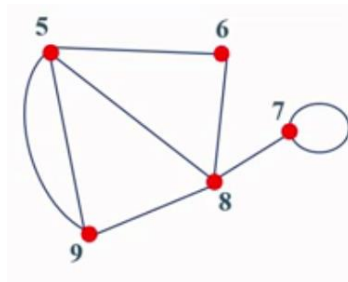
Penyelesaian:

- $V = \{ P, Q, R, S, T, U \}$
 $n(V) = 6$
- $E = \{ (P,Q), (P,U), (P,U), (Q,R), (Q,U), (R,S), (R,T), (S,S), (S,T), (T,U) \}$
 $n(E) = 10$
- Bilangan darjah = $2 \times n(E) = 2 \times 10 = 20$

<p>Latihan 3 Lukis satu graf mudah berdasarkan maklumat yang diberikan $V = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ $E = \{ (1,3), (1,7), (1,9), (9,7), (3,9), (7,5), (3,5) \}$</p>	<p>Latihan 4 Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung berdasarkan maklumat yang diberikan $V = \{ A, B, C, D, E \}$ $E = \{ (A,E), (A,B), (A,D), (B,B), (B,C), (C,D), (C,D), (E,B) \}$</p>
---	--

15. Graf tidak boleh dilukis jika jumlah darjah adalah **ganjil**.

Latihan 5
Tentukan
a) V dan $n(V)$
b) E dan $n(E)$
c) Bil. darjah



Latihan 6
Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung berdasarkan maklumat yang diberikan
 $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
 $E = \{ (1,5), (1,5), (3,5), (1,1), (3,3), (2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5) \}$

Latihan 7
Lukiskan graf mudah bagi bilangan darjah yang diberikan

2, 3, 2, 3, 4

Latihan 8
Lukis graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi bagi bilangan darjah yang diberikan

2, 2, 4, 6, 6

5.1.2 Membanding beza

16. Graf Terarah dan tak Terarah

Graf Terarah	Graf tak Terarah
<p>ialah graf dengan keadaan tepinya dilukis mempunyai arah yang berkaitan</p> <p>Bagi tepi yang mengaitkan bucu 1 dan 3 adalah $(1, 3) \neq (3, 1)$ kerana arah yang ditunjukkan adalah dari bucu 1 ke bucu 3 dan bukan dari bucu 3 ke bucu 1.</p>	<p>ialah graf dengan keadaan tepinya yang dilukis tidak mempunyai arah yang berkaitan.</p> <p>Bagi tepi yang mengaitkan bucu 1 dan 3 adalah $(1, 3) = (3, 1)$</p>

17. Contoh 4

Lukis satu graf terarah berdasarkan maklumat yang diberikan

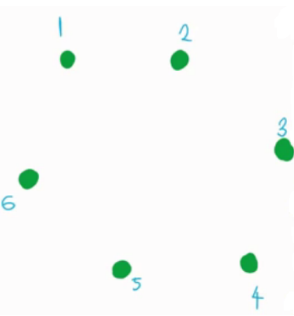
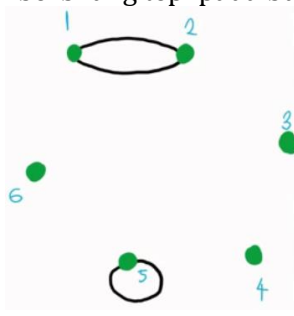
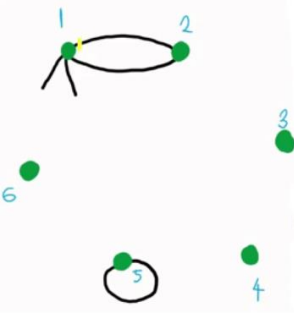
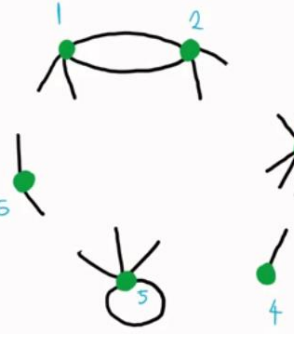
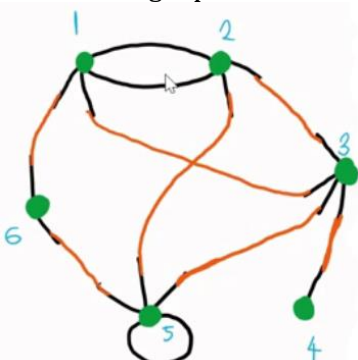
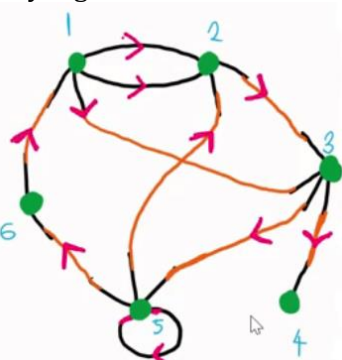
$$V = \{ A, B, C, D, E \}$$

$$E = \{ (A,B), (A,D), (E,A), (E,D), (B,E), (D,C), (C,D) \}$$

<p>Langkah 1: Buat bucu</p>	<p>Langkah 2: Sambungkan setiap bucu. Contoh (A,B). Perlu bermula dari A dan berakhir di B</p>	<p>Langkah 3: Lengkapkan setiap bucu</p>
---------------------------------	--	--

18. Lukis satu graf terarah berdasarkan maklumat yang diberikan:

- a) mempunyai gelang pada bucu 5.
- b) berbilang tepi pada $1 \rightarrow 2$.
- c) $d(1)_{in} = 1$ $d(1)_{out} = 3$
- d) $d(2)_{in} = 3$ $d(2)_{out} = 1$
- e) $d(3)_{in} = 2$ $d(3)_{out} = 2$
- f) $d(4)_{in} = 1$ $d(4)_{out} = 0$
- g) $d(5)_{in} = 2$ $d(5)_{out} = 3$
- h) $d(6)_{in} = 1$ $d(6)_{out} = 1$

<p>Langkah 1 Lukis setiap bucu.</p> 	<p>Langkah 2 Masukkan syarat awal seperti gelang pada bucu 5 dan berbilang tepi pada bucu 1 dan 2.</p> 
<p>Langkah 3 Kirakan jumlah tepi bagi setiap bucu. Contohnya bucu 1 mempunyai 4 tepi. Maka 4 tepi (garis) perlu dibuat untuk bucu 1.</p> 	<p>Langkah 4 Lengkapkan setiap bucu dengan tepi-tepi yang berkaitan</p> 
<p>Langkah 5 Sambung setiap bucu yang lain tanpa adanya gelang dan berbilang tepi</p> 	<p>Langkah 6 Lengkapkan graf dengan arah mengikut bucu-bucu yang diberikan.</p> 

Latihan 9

Lukiskan graf terarah mengikut maklumat berikut:

$$V = \{P, Q, R, S, T, U, V\}$$

$$E = \{(P,Q), (Q,R), (Q,S), (S,P), (S,R), (S,T), (U,T)\}$$

Latihan 10

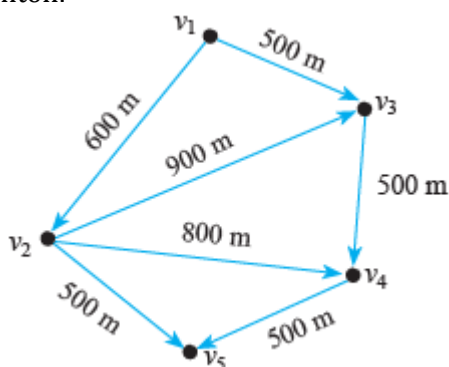
Lukiskan graf terarah mengikut maklumat berikut:

- mempunyai gelung pada bucu Q dan S.
- QS ialah berbilang tepi
- $d(P)_{in} = 0$ $d(P)_{out} = 2$
- $d(Q)_{in} = 4$ $d(Q)_{out} = 2$
- $d(R)_{in} = 0$ $d(R)_{out} = 2$
- $d(S)_{in} = 4$ $d(S)_{out} = 2$

19. Graf Berpemberat dan tak berpemberat

Graf Berpemberat

- mempunyai nilai pada tepinya.
- pemberat boleh diwakili dengan jarak, masa, kos, isipadu atau apa-apa yang boleh diukur.
- panjang tepi tidak mempengaruhi nilai pemberat.
- Contoh:



Graf tak Berpemberat

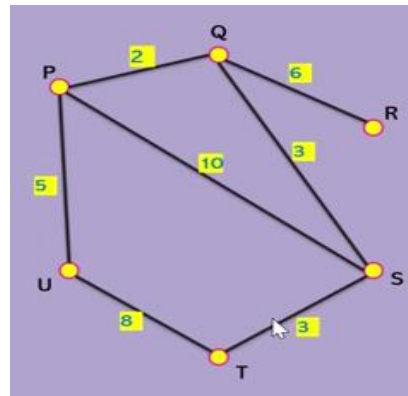
- tiada nilai pada tepinya.
- tepi mengaitkan maklumat seperti hierarki jawatan, peta alir, peta pokok dan peta buih.
- Contoh:



20. Contoh 5

Lukis graf berpemberat dan tak terarah berdasarkan maklumat berikut:

Pasangan bucu	Jarak (km)
(P,Q)	2
(Q,R)	6
(Q,S)	3
(P,S)	10
(P,U)	5
(U,T)	8
(S,T)	3



Seterusnya, Faqih bergerak dari R dan akan melalui semua bucu yang lain dengan sekali perjalanan. Tentukan laluan terpendek yang Faqih perlu ambil.

Laluan sehala 1:

$$R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow U \rightarrow P = 25 \text{ km}$$

Laluan sehala 2:

$$R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow U \rightarrow T = 32 \text{ km}$$

Laluan sehala 3:

$$R \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow U = 29 \text{ km}$$

Laluan sehala 4:

$$R \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow U \rightarrow T \rightarrow S = 24 \text{ km}$$

Faqih perlu memilih laluan ke-4

Latihan 11

Lukis graf berpemberat dan tak terarah yang diberikan:

Pasangan bucu	Pemberat (km)
(J, B)	11.6
(P, R)	40
(B, R)	20.7
(B, K)	11.4
(K, J)	6.6
(P, J)	9.3

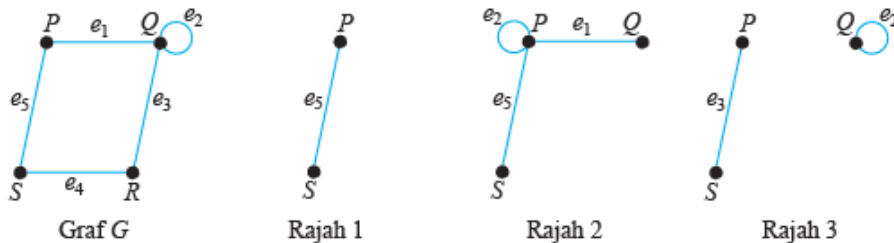
Salleh memandu kereta dari bandar P ke R mengikut jarak terpendek, manakala Dollah perlu melalui bandar J dan B. Hitung beza jarak perjalanan mereka.

5.1.3 Mengenal dan melukis subgraf dan pokok

21. **Subgraf** merupakan sebahagian atau keseluruhan suatu graf yang dilukis semula tanpa mengubah kedudukan asal bucu dan tepi.

22. Contoh 6

Tentukan sama ada Rajah 1, Rajah 2 dan Rajah 3 ialah subgraf bagi graf G .



Rajah 1 = Ya kerana pasangan bucu untuk e_5 adalah sama.

Rajah 2 = Tidak kerana kedudukan gelung e_2 bukan pada bucu Q .

Rajah 3 = Tidak kerana tepi yang mengaitkan bucu P dan bucu S adalah bukan e_3 .

Latihan 12

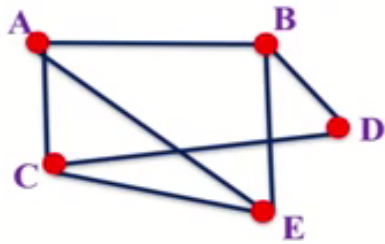
Tentukan sama ada graf berikut subgraf atau bukan bagi graf berikut.

23. Terdapat dua cara untuk melukis subgraf, iaitu:

- dengan **menyingkirkan tepi**.
- dengan **penyingkirkan bucu**.

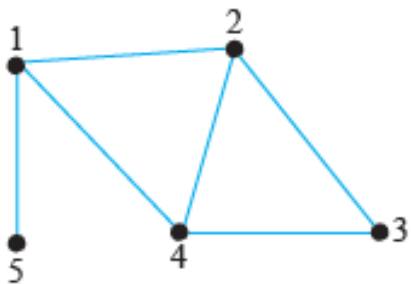
Latihan 13

Lukis 5 subgraf bagi graf di bawah dengan cara menyingkirkan tepi.

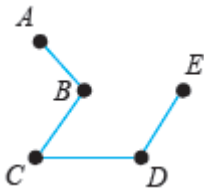
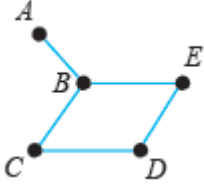
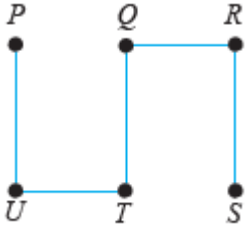
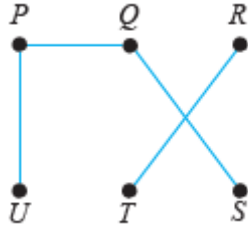


Latihan 14

Lukis 5 subgraf bagi graf di bawah dengan cara menyingkirkan bucu.

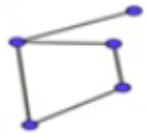


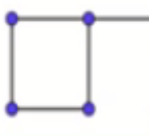


24. **Pokok** adalah subgraf bagi suatu graf dengan kesemua bucu bersambung dengan satu laluan sahaja tanpa ada kitaran.
25. Suatu pokok yang mempunyai bilangan bucu n akan mempunyai bilangan tepi $n-1$.
26. **Bilangan tepi = Bilangan bucu – 1**
27. Berikut adalah beberapa contoh graf pokok dan bukan pokok.

			
Pokok	Bukan pokok -ada kitaran	Pokok	Bukan pokok Bilangan tepi = 4 Bilangan bucu = 6

Latihan 15

Tentukan sama ada graf berikut merupakan pokok atau bukan. Justifikasikan jawapan anda.

latihan 16

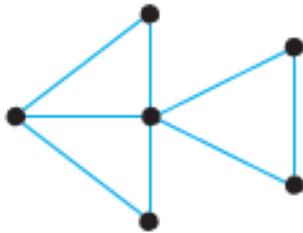
Lukis 2 contoh graf pokok dengan maklumat yang diberikan.

a) $n(V) = 7$

b) $n(E) = 5$

28. Contoh 7

Lukis dua pokok berdasarkan graf yang diberikan.

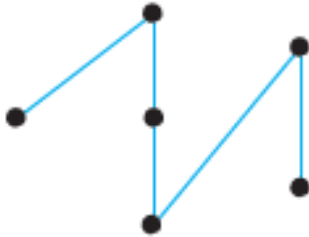


Bucu, $n(V) = 6$

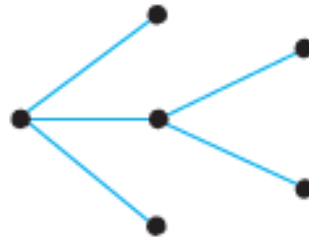
Tepi, $n(E) = 8$ (terlebih 3)

Penyelesaian:

(i)

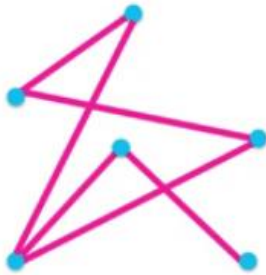


(ii)



Latihan 17

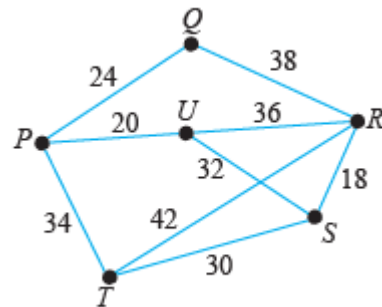
Lukiskan 3 pokok berdasarkan graf yang diberikan.



29. Contoh 8

Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat.

- Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum
- Berapakah jumlah pemberat minimum?

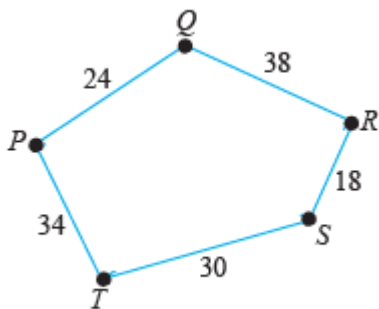


Penyelesaian:

Bucu, $n(V) = 6$

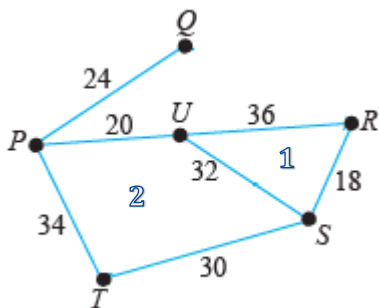
Tepi, $n(E) = 9$ (terlebih 4)

Cari kitaran yang paling besar

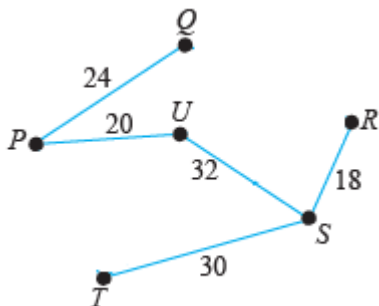


Singkirkan pemberat yang paling besar kerana soalan mencari pemberat yang minimum. Jadi tepi 38 perlu disingkirkan kerana pemberat yang paling besar.

Ulang semula langkah dengan mencari kitaran terbesar, dan singkirkan pemberat yang terbesar.



Terdapat dua kitaran. Kitaran pertama ialah URS dan kedua ialah PUST. Untuk kitaran 1, pemberat yang terbesar adalah tepi UR dengan nilai 36 manakala bagi kitaran 2, pemberat yang terbesar ialah tepi PT dengan nilai 34.



Jumlah pemberat minimum:

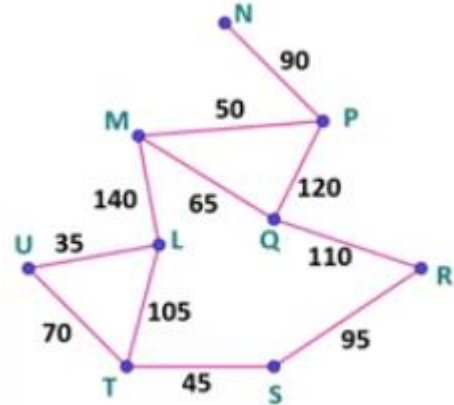
$$= 24 + 20 + 32 + 18 + 30$$

$$= 124$$

Latihan 18

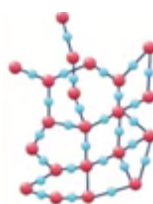
Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat.

- a) Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum
- b) Berapakah jumlah pemberat minimum?



5.1.4 Mewakilkkan maklumat dalam bentuk rangkaian

30. Rangkaian merupakan satu bentuk graf yang unik dan boleh digunakan untuk mewakili maklumat bertindih atau bersilang.
31. Rangkaian boleh dilukis sebagai
 - a) graf terarah dan berpemberat atau graf terarah dan tak berpemberat
 - b) graf tak terarah dan berpemberat atau graf tak terarah dan tak berpemberat
32. Contoh rangkaian adalah seperti berikut:



33. Contoh 9

Jadual di bawah menunjukkan empat jenis makanan kegemaran beberapa orang murid.

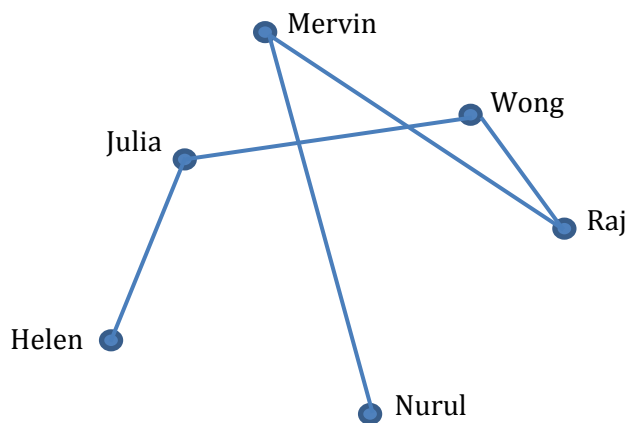
Makanan	Nama murid
Nasi ayam	Mervin, Raj
Nasi lemak	Mervin, Nurul
Nasi goreng	Helen, Julia
Nasi kandar	Wong, Julia
Mi goreng	Wong, Raj

Tukarkan maklumat yang diberi di dalam jadual di atas dalam bentuk rangkaian.

Penyelesaian:

Tepi = makanan = kerana mempunyai satu jenis sahaja

Bucu = nama murid = kerana ada nama yang sama



Latihan 19

Jadual di bawah menunjukkan empat jenis makanan kegemaran beberapa orang murid.

Murid	Makanan
Faqih	Burger, Mi goreng
Naimah	Burger, Ayam goreng
Ammar	Roti canai, Burger
Maznah	Mi goreng, Nasi kerabu
Russell	Ayam goreng, Mi goreng
Ziha	Nasi kerabu, Roti canai

Latihan 20

Mia ialah kawan Dilla dan Syasya.

Dilla ialah kawan Syasya, Wany dan Nad.

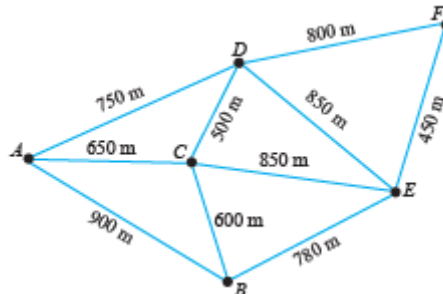
Wany berkawan dengan Nad dan Tasnim.

Manakala Tasnim berkawan dengan Fariahah.

Tukarkan maklumat di atas dalam bentuk rangkaian.

Latihan 21

Graf tak terarah di bawah menunjukkan kedudukan enam buah rumah di sebuah kampung. Seorang jurujual perlu ke semua rumah tersebut bermula dari rumah A dan berakhir di rumah F.



- Lukis suatu graf terarah mewakili jarak terpendek dari A ke F dengan syarat semua laluan hanya dilalui sekali sahaja.
- Hitung jarak terpendek dalam km, berdasarkan graf yang dilukis.